JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY (A) **14**, 128–135 (1973)

Note

Quelques Propriétés des "Séries Rationnelles en Variables Non Commutatives"

KHIRA LAMECHE

7 rue Barrault, 75-Paris 13e, France

Communicated by the late Theodore S. Motzkin

Received September 1, 1971

On étend des résultats de G. Polyà et D. G. Cantor à des séries rationnelles en variables non commutatives.

1. INTRODUCTION

Polyà a démontré le résultat suivant [3, 5]:

THÉORÈME DE POLYÀ. *Soit* (a_n) *une suite d'entiers algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *la série* $\sum na_nz^n$ *est rationnelle*

(ii) *la série* $\sum a_nz^n$ *est rationnelle*

(iii) *la série* $\sum na_nz^{n-1}$ *est rationnelle et ses résidus sont nuls.*

On désignera par X un ensemble fini appelé *alphabet*, par X^* le monoïde libre qu'il engendre, et par e le mot vide de X^*. A tout mot f de X^* est associé sa *longueur* notée $|f|$. On écrira la série formelle a sur X à coefficients dans un anneau A sous la forme

$$a = \sum_{f \in X^*} (a, f) f, \qquad (a, f) \in A.$$

Une série formelle a est dite *quasi-inversible* si $(a, e) = 0$; le *quasi-inverse* a^* de a est alors la série définie par

$$a + a^* = aa^*.$$

On appelle *produit de Hadamard* des séries formelles a et b la série notée $a \odot b$ définie par

$$(a \odot b, f) = (a, f)(b, f) \qquad \text{pour tout } f \text{ de } X^*.$$

Une série formelle a sur X à coefficients entiers est dite *rationnelle* [6] s'il existe une représentation μ du monoïde X^* dans $M_n(\mathbb{Z})$ et une matrice P de $M_n(\mathbb{Z})$ telles que l'on ait

$$(a, f) = \operatorname{Tr} P\mu f \qquad \text{pour tout } f \text{ de } X^*.$$

L'ensemble des séries rationnelles sur X à coefficients entiers forme une algèbre sur $\mathbb{Z}$ stable par quasi-inversion des éléments quasi-inversibles [6] et par produit de Hadamard [7], théorème de Jungen-Schützenberger]. On s'intéresse à la conjecture suivante:

CONJECTURE. *Si a est une série formelle sur X à coefficients entiers telle que $|f|$ divise (a, f) pour tout mot non vide de X^*, alors la série a est rationnelle si et seulement si la série de terme général $(a, f)/|f|$ l'est.*

Nous allons la démontrer dans un cas particulier.

DEFINITION. On dit qu'une série rationnelle a sur X est non singulière, s'il existe une représentation μ de a pour laquelle l'une des matrices μx, $x \in X$, est non singulière.

Avec cette définition, on a le résultat suivant:

THÉORÈME [3]. *Soit a une série rationnelle sur X à coefficients entiers. Supposons que*

(i) *le terme général (a, f) de a est divisible par $|f|$,*

(ii) *la série a est non singulière,*

alors, la série de terme général $(a, f)/|f|$ est rationnelle.

2. Résultats Auxiliaires

LEMME 1. *Soit a une série rationnelle à une variable. Si a n'est pas un polynôme, alors son terme général s'écrit à partir d'un certain rang sous la forme*

$$\sum_{i=1}^{r} P_i(n)\, \alpha_i^n$$

où les inverses des α_i *sont les pôles de a et les* P_i *des polynômes; cette écriture est unique: de plus le résidu en* α_i^{-1} *de la fraction rationnelle* $X^p a$, *p entier, est* $-\alpha_i^{-1-p} P_i(-p-1)$.

Preuve du lemme 1. Elle repose essentiellement sur la décomposition de a en éléments simples; pour la dernière partie, on remarque que le résidu de a en α_i^{-1} est $-\alpha_i^{-1} P_i(-1)$.

Lemme 2. *Soit U une matrice unipotente de* $M_k(\mathbf{Q})$, $k \geqslant 2$ *et soit L une forme linéaire sur* $M_k(\mathbf{Q})$. *Si la suite* $(L(U^n))$ *n'est pas nulle pour n grand, alors il existe un unique polynôme P tel que l'on ait*

$$P(n) = L(U^n) \qquad \textit{pour} \quad n \geqslant 0$$

et il vérifie de plus cette identité pour les entiers n négatifs.

Preuve du lemme 2. La suite de terme général $L(U^n)$ est une suite récurrente, et comme U admet 1 comme seule valeur propre, on a l'écriture unique

$$L(U^n) = P(n) \qquad \text{où } P \text{ est un polynôme.}$$

Si on écrit alors $U = I + N$ où N est nilpotente, on a, pour $n \geqslant 0$,

$$P(n) = L((I+N)^n) = \sum_{p \geqslant 0} \binom{n}{p} L(N^p)$$

et donc

$$P(X) = \sum_{p \geqslant 0} \binom{X}{p} L(N^p) \qquad \text{où} \qquad \binom{X}{p} = X(X-1)\cdots(X-p+1)/p!$$

On en déduit $P(n) = L(U^n)$ pour tout n entier puisque $\sum_{p \geqslant 0} \binom{n}{p} N^p = (I+N)^n$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.

3. Démonstration du Théorème

Soit donc une représentation non singulière $\mu: X^* \to M_k(\mathbb{Z})$ pour laquelle la matrice $A = \mu x$ est inversible dans $M_k(\mathbf{Q})$, et soit aussi une matrice P de $M_k(\mathbb{Z})$, vérifiant:

$$|f| \text{ divise } Tr\, P\mu f \text{ pour tout mot non vide de } X^*.$$

Il est clair que le théorème est démontré lorsque la série $\sum (Tr\, P\mu f) f$ est un polynôme, cas que l'on écarte désormais.

La matrice A admet la décomposition multiplicative de Jordan [1]:

$$A = A_S A_U, \qquad A_S \text{ semi-simple et } A_U \text{ unipotente.}$$

A_S et A_U sont des polynômes en A à coefficients rationnels.

LEMME 3. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\operatorname{Tr} P\mu f A_U^{-|f|} = 0 \qquad \textit{pour tout mot non vide } f \textit{ de } X^*.$$

Preuve du lemme. On considère, pour chaque f, la série rationnelle à une variable

$$r_f(T) = \sum_{n \geqslant 0} \operatorname{Tr} P\mu f A^n T^{n+|f|}$$

et on note $r_n = \operatorname{Tr} P\mu f A^n$.

On suppose d'abord que r_f n'est pas un polynôme. Dans ce cas, la série r_f vérifie les hypothèses du théorème de Polyà: les résidus de la fonction $r_f(T)/T$ sont nuls, ce que le lemme 1 permet d'écrire, avec des notations évidentes, $P_i(-|f|) = 0$; en faisant la somme de ces relations et grâce au lemme 2, on en déduit

$$0 = \sum_i P_i(-|f|) = \sum_j \langle P\mu f A_U^{-|f|} e_j, e_j^* \rangle = \operatorname{Tr} P\mu f A_U^{-|f|}$$

où (e_j) désigne une base de vecteurs propres de A_S et (e_j^*) la base duale. Si r_f est un polynôme, on a $r_n = 0$ pour $n \geqslant m$; comme A est inversible, c'est une combinaison linéaire en les A^n, $n \geqslant m$, et puisque A_U, donc A_U^{-1}, est un polynôme en A, il en résulte que $A_U^{-|f|}$ est aussi une combinaison linéaire en les A^n, $n \geqslant m$. On a donc encore dans ce cas $\operatorname{Tr} P\mu f A_U^{-|f|} = 0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. On explicite le résultat du lemme 3; pour cela on note M la matrice nilpotente, polynôme en A à coefficients rationnels définie par $(I + M) A_U = I$. On a alors:

$$\operatorname{Tr} P\mu f A_U^{-|f|} = \operatorname{Tr} P\mu f + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \binom{|f|}{i} \operatorname{Tr} P\mu f M^i = 0.$$

Soit d un entier positif tel que dM soit à coefficients entiers. La relation précédente fait alors apparaître la série de terme général

$$-(k-1)!\, d^{k-1} \operatorname{Tr} P\mu f / |f|$$

comme somme des $k-1$ séries c_i

$$(c_i, f) = \frac{(k-1)!}{i!} d^{k-1-i}(|f|-1) \cdots (|f|-i+1) \operatorname{Tr} P\mu f(dM)^i,$$

autrement dit, on a

$$c_i = \frac{(k-1)!}{i!} d^{k-1-i} \sum_f (|f|-1) f \odot \cdots \odot \sum_f (|f|-i-1) f$$

$$\odot \sum_f \operatorname{Tr} P\mu f(dM^i) f,$$

qui est rationnelle d'après le théorème de Jungen-Schützenberger. On a ainsi montré que la série de terme général $(k-1)!\, d^{k-1} \operatorname{Tr} P\mu f/|f|$ est rationnelle. On achève grâce au résultat suivant de Schützenberger [6]:

Si a est une série formelle à coefficients entiers telle que la série na soit rationnelle pour un entier n non nul, alors a est rationnelle.

4. Extension du Théorème

(a) On peut remarquer que le résultat reste valable si on prend un anneau quelconque, non nécessairement commutatif unitaire.

(b) On peut aussi, dans le cas où $\operatorname{Tr} P\mu f$ ne s'annule jamais, remplacer l'hypothèse (ii) du théorème par

(ii)′ *la série a est singulière et l'algèbre engendrée par les parties semi-simples des polynômes homogènes en les μx, $x \in X$, contient les matrices scalaires.*

En effet, on procède de façon analogue à la démonstration du théorème; esquissons cette preuve. Soit g un mot non vide de X^*. La matrice $G = \mu g$ admet la décomposition additive de Jordan [1]:

$$G = G_S + G_N, \qquad G_S \text{ semi-simple et } G_N \text{ nilpotente}$$

et G_S et G_N sont des polynômes en G à coefficients rationnels. Si alors f est un mot non vide de X^*, on considère la série rationnelle à un variable

$$s_f(T) = \sum_{p \geqslant 0} \operatorname{Tr} P\mu f G^p T^{p|g|+|f|}$$

qui vérifie toutes les conditions du théorème de Polyà, d'après les hypothèses faites sur $\operatorname{Tr} P\mu f$; la conclusion (iii) s'écrit ici

$$\operatorname{Tr} P\mu f G_V^{|f|/|g|} G_S^q = 0 \qquad \text{pour tout entier } q \geqslant 1,$$

où G_V est une matrice unipotente, polynôme en G_N à coefficients rationnels. On achève la démonstration en prenant cette relation pour $q = 1$ et pour les g tels que l'on ait une relation

$$r = \sum_n r_n \Big(\sum_{|g|=n} (a_g g)_S \Big) \qquad \text{avec } a_g\,,\ r_n \text{ et } r \text{ entiers non nuls}$$

et on développe l'expression obtenue comme on l'a fait pour la démonstration du théorème.

(c) *Remarque.* Si la série rationnelle a vérifie les hypothèses du théorème, alors la série de terme général $(a, f)/|f|$ est non singulière. En effet, on a vu dans la démonstration du théorème que cette dernière série était pouvait s'obtenir comme somme de produits de Hadamard de séries rationnelles qui sont toutes non singulières; or il est clair que la somme et le produit de séries non singulières est encore une série non singulière.

(d) *Extensions de certains résultats de Cantor.* Le théorème de Polyà a été prolongé de la façon suivante par Cantor [2]:

THÉORÈME DE CANTOR. *Soit (a_n) une suite d'entiers algébriques et H un polynôme à coefficients complexes non nul. Si la série $\sum_n H(n)\, a_n z^n$ est une fonction rationnelle, il en est de même de la série $\sum_n a_n z^n$.*

Nous pouvons maintenant en donner l'extension suivante:

THÉORÈME [4]. *Soit $(a, f)_{f \in X^*}$ une famille d'entiers algébriques et H un polynôme à coefficients complexes non nul. Si la série*

$$\sum_{f \in X^*} H(|f|)(a, f) f$$

est rationnelle non singulière, alors la série $\sum_f (a, f) f$ est rationnelle.

La démonstration de Cantor repose sur les trois lemmes suivants:

LEMME A. *Soit K un corps de nombres algébriques et a un élément de K. Alors l'ensemble des idéaux premiers de K qui divise le numérateur d'un élément de la suite*

$$\{n - a \mid n \in N^*\}$$

est infini.

LEMME B. *Soit (a_n) une suite d'entiers algébriques et a un nombre* *algébrique. Si la série* $\sum (n - a) a_n z^n$ *est une fonction rationnelle, il en est de la série* $\sum a_n z^n$.

Lemme C. *Soit* (a_n) *une suite d'entiers algébriques et* H *un polynôme à coefficients complexes non nul. Si la série* $\sum H(n) a_n z^n$ *est une fonction rationnelle, alors il existe un polynôme* $\tilde{H}$ *à coefficients algébriques non nul tel que la série* $\sum \tilde{H}(n) a_n z^n$ *soit une fonction rationnelle.*

On étend sans difficultés ces deux derniers lemmes à des séries à variables non commutatives:

Lemme B. *Soit* $(r, f)_{f \in X^*}$ *une famille d'entiers algébriques et* a *un nombre algébrique. Si la série* $\sum (|f| - a)(r, f) f$ *est une série rationnelle non singulière, il en est de même de la série* $\sum (r, f) f$.

La démonstration de ce lemme B′ est une simple application du théorème démontré au n° 3 et du lemme B de Cantor.

Lemme C′. *Soit* $(r, f)_{f \in X^*}$ *une famille d'entiers algébriques et* H *un polynôme à coefficients complexes non nul. Si la série* $\sum H(|f|)(r, f) f$ *est une série rationnelle, alors il existe un polynôme* $\tilde{H}$ *à coefficients algébriques non nul tel que la série* $\sum \tilde{H}(|f|)(r, f) f$ *soit rationnelle.*

Démonstration. Elle reprend celle du lemme C de Cantor. On introduit une représentation μ de X et une matrice P vérifiant

$$H(|f|)(r, f) = \operatorname{Tr} P \mu f.$$

Soit Ω le corps des nombres algébriques et soit L le plus petit corps qui contienne Ω, les coefficients du polynôme H, les coefficients des matrices μx pour $x \in X$ et les coefficients de la matrice P: c'est une extension finie de Ω; soit $(x_1, ..., x_s)$ une base de transcendance de L sur Ω. Les coefficients du polynôme H, les coefficients des matrices μx pour $x \in X$, les coefficients de la matrice P satisfont des équations polynômiales à coefficients dans $\Omega[x_1, ..., x_s]$. Appelons $h_1, ..., h_t$ tous les coefficients non nuls de ces polynômes: ce sont des polynômes en $x_1, ..., x_s$ à coefficients dans Ω. Comme ils sont en nombre fini, il existe des nombres algébriques $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_s$ tels que

$$h_i(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_s) \neq 0 \qquad \text{pour tout } i, \quad 1 \leqslant i \leqslant t.$$

L'application $x_i \mapsto \tilde{x}_i$ définit un homomorphisme d'anneaux de $\Omega[x_1, ..., x_s]$ sur Ω qui est l'identité sur Ω. On l'étend en un homomorphisme

$$\varphi \colon L \to \Omega.$$

Pour $a \in L$, on note $\tilde{a}$ l'image $\varphi(a)$ de a par φ. Si b est un polynôme à coefficients dans L, on note $\tilde{b}$ le polynôme défini par

$$\tilde{b}(|f|) = \sum \tilde{b}_i |f|^i \text{ si les } b_i \text{ sont donnés par } b(|f|) = \sum b_i |f|^i$$

ce polynôme $\tilde{b}$ a même degré que le polynôme b. Avec ces notations, on a

$$\widetilde{\operatorname{Tr} P\mu f} = \operatorname{Tr} \tilde{P}\widetilde{\mu f} = \widetilde{H(|f|)(r,f)} = \tilde{H}(|f|)(r,f).$$

Il est immédiat que l'application

$$\tilde{\mu} : X^* \to M_N(\Omega) \quad \text{définte par } \tilde{\mu}x = \widetilde{\mu x} \quad \text{pour} \quad x \in X$$

est un homomorphisme, et que la série de terme général $\tilde{H}(|f|)(r,f)$ est donc rationnelle.

Démonstration de l'Extension du Théorème de Cantor à des Variables Non Commutatives. Le lemme C' permet de supposer le polynôme H à ses coefficients entiers algébriques; soit alors a une racine de H. On définit alors un polynôme K par

$$K(|f|) = H(|f|)/(|f| - a).$$

D'après le lemme de Gauss, K est également un polynôme à coefficients entiers algébriques. Si $(r,f) = H(|f|)(r',f)$, on pose $(r'',f) = K(|f|)(r',f)$. Alors la série $\sum (r',f)(|f| - a)f$ est une série rationnelle, et donc, d'après le lemme B', la série r' est une série rationnelle. La remarque (c) permet de lui associer une représentation non singulière. Il suffit de raisonner alors par récurrence sur le degré de H en utilisant les résultats précédents.

References

1. N. Bourbaki, Modules et anneaux semi-simples, "Algèbre," ch. 8, p. 108, Hermann, Paris, 1958.
2. D. G. Cantor, On arithmetic properties of coefficients of rational functions, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 55–58.
3. K. Lameche, Thèse de 3ème Cycle, Faculté des Sciences de Paris, Juin, 1970.
4. K. Lameche, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **272** (1971), 296–298.
5. G. Polyà, Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **151** (1921), 1–31.
6. M. P. Schützenberger, *Information and Control* **4** (1961), 245–270.
7. M. P. Schützenberger, On a theorem of R. Jungen, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 885–890.

Printed in Belgium